Available at WWW.MATHEMATICSWEB.ORG
POWERED BY SCIENCE DIRECT
ACADEMIC PRESS
Journal of Approximation Theory 122 (2003) 208–223
JOURNAL OF Approximation Theory
http://www.elsevier.com/locate/jat

Sur les fonctions q-Bessel de Jackson

Changgui Zhang*

Laboratoire AGAT (UMR–CNRS 8524), UFR Math., Université des Sciences et Technologies de Lille, Cité scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Received 3 October 2001; accepted in revised form 10 April 2003

Communicated by Mourad Ismail

Abstract

(About Jackson q-Bessel functions)

Laplace transform allows to resolve differential equations in the neighborhood of an irregular singular point. The purpose of the article is to study how to apply a basic Borel–Laplace transformation to q-difference equations satisfied by the q-Bessel functions of F.H. Jackson. Connection matrices are obtained between solutions at the origin and solutions at infinity.

Keywords: q-Bessel function; Connection matrix; Jacobi's theta function; q-Borel–Laplace transform

0. Introduction

En 1847, E. Heine a introduit le q-analogue ${}_2\varphi_1(a,b;c;q,x)$ de la série hypergéométrique ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;x)$ d'Euler-Gauss par la formule

$${}_2\varphi_1(a,b;c;q,x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(q;q)_n(c;q)_n}x^n,$$

où q désigne un élément de l'intervalle $]0,1[$, a, b, c désignent des nombres complexes tels que $c\notin q^{-\mathbf{N}}$, et où l'on note, pour tous $z\in\mathbf{C}$ et $n\in\mathbf{N}$:

$$(z;q)_0=1,\quad (z;q)_{n+1}=(1-z)(1-zq)\dots(1-zq^n).$$

*Corresponding author.
E-mail address: zhang@agat.univ-lille1.fr

0021-9045/03/$ - see front matter
doi:10.1016/S0021-9045(03)00073-X

On s'aperçoit aussitôt que si $|x|<1$, alors

$$\lim_{q\to 1^-} {}_2\varphi_1(q^\alpha, q^\beta; q^\gamma; q, x) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$$

pourvu que γ ne soit pas un entier négatif ou nul.

Soient $\mathscr{D}_q$, σ_q les opérateurs aux q-différences définis respectivement par les formules

$$\mathscr{D}_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}, \quad \sigma_q f(x) = f(qx).$$

On peut vérifier que la fonction $u(x) = {}_2\varphi_1(a, b; c; q, x)$ satisfait à l'équation aux q-différences

$$x(c - abx)\mathscr{D}_q^2 u + \left[\frac{1-c}{1-q} + \frac{(1-a)(1-b) - (1-abq)}{1-q}x\right]\mathscr{D}_q u \\ - \frac{(1-a)(1-b)}{(1-q)^2}u = 0, \tag{0.1}$$

laquelle est une équation aux q-différences *fuchsienne* sur la sphère de Riemman $\mathbf{P}(\mathbf{C})$. En utilisant une intégrale de Barnes-Mellin, G.N. Watson a établi, en 1910, une formule permettant de lier ${}_2\varphi_1(a, b; c; q, x)$ à des solutions à l'infini de l'équation (0.1):

$${}_2\varphi_1(a, b; c; q, x) = C_1(x)\,{}_2\varphi_1(a, aq/c; aq/b; q, cq/abx) \\ + C_2(x)\ {}_2\varphi_1(b, bq/c; bq/a; q, cq/abx) \tag{0.2}$$

où

$$C_1(x) = \frac{(b, c/a; q)_\infty (ax, q/ax; q)_\infty}{(c, b/a; q)_\infty (x, q/x; q)_\infty}, \quad C_2(x) = \frac{(a, c/b; q)_\infty (bx, q/bx; q)_\infty}{(c, a/b; q)_\infty (x, q/x; q)_\infty}.$$

Ici, on considère le prolongement analytique de la fonction ${}_2\varphi_1(a, b; c; q, x)$ dans le secteur ouvert défini par $|\arg(-x)|<\pi$ et on suppose que les paramètres a, b, c vérifient les hypothèses suivantes:

$$a, b \neq 0; \quad c, a/b \notin q^{\mathbf{Z}}.$$

On pose, pour tous z_1, $z_2 \in \mathbf{C}$:

$$(z_1, z_2; q)_\infty = (z_1; q)_\infty (z_2; q)_\infty, \quad (z_j; q)_\infty = \prod_{n\geqslant 0} (1 - z_j q^n).$$

Il importe de noter que $C_j(qx) = C_j(x), j = 1, 2$, ce qui signifie que les $C_j(x)$ sont des *fonctions q-périodiques*. On peut dire que la formule (0.2) est un q-analogue d'une formule de connexion classique pour la fonction ${}_2F_1(\alpha; \beta; \gamma; x)$ ou, plus exactement, pour l'équation hypergéométrique d'Euler-Gauss associée ; pour plus de détails, voir [6, p. 106; 12, p. 116].

Dans le présent article, nous nous proposons d'établir une formule similaire à (0.2) mais cette fois pour la fonction ${}_2\varphi_1(0, 0; c; q, x)$ avec $c \neq 0$, cette dernière étant liée à une version q-analogue de l'équation différentielle hypergéométrique de Bessel. En fait, F.H. Jackson a introduit (cf. [6, p. 25; 7, (1.13)]), en 1905, deux versions

q-analogues pour la famille des fonctions de Bessel J_ν, $\nu \in \mathbf{R}\backslash\{-1,-2,-3,\ldots\}$, dont l'une est la suivante:

$$J_\nu^{(1)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_2\varphi_1\left(0,0;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4}\right);$$

la définition de l'autre q-analogue $J_\nu^{(2)}(x;q)$ sera rappelée au § 4 de notre article.

Soit $p=\sqrt{q}$; on a la relation

$$\left(x\mathscr{D}_p - \frac{1-p^\nu}{1-p}\right)\left(x\mathscr{D}_p - \frac{1-p^{-\nu}}{1-p}\right)J_\nu^{(1)}(x;q) + \left(\frac{x}{2(1-p)}\right)^2 J_\nu^{(1)}(x;q) = 0,$$

qui n'est rien d'autre qu'une version discrète de l'équation différentielle

$$\left(x\frac{d}{dx}-\nu\right)\left(x\frac{d}{dx}+\nu\right)y + x^2y = 0,$$

satisfaite par la fonction limite $\lim_{q\to 1^-} J_\nu^{(1)}(x(1-q);q)$, traditionnellement notée $J_\nu(x)$. Par ailleurs, l'équation précédente satisfaite par $y(x)=J_\nu^{(1)}(x;q)$ peut se mettre sous la forme ($p=\sqrt{q}$)

$$\left\{\sigma_q - (q^{\nu/2}+q^{-\nu/2})\sigma_p + \left(1+\frac{x^2}{4}\right)\right\}y(x) = 0,$$

ce qui permet de dire que le point à l'origine est un point singulier fuchsien et celui à l'infini un point singulier irrégulier (cf. [1,14]).

Dans la suite, nous supposerons que ν est un nombre réel fixé tel que $\nu \notin \mathbf{Z}$. Vu que l'équation (0.3) est invariante par la symétrie $\nu \to -\nu$, la fonction $x \mapsto J_{-\nu}^{(1)}(x;q))$ en est également solution. D'après [7, (2.5)], on a

$$J_\nu^{(1)}(x;q)J_{-\nu}^{(1)}(px;q) - J_\nu^{(1)}(px;q)J_{-\nu}^{(1)}(x;q) = \frac{(q^\nu,q^{1-\nu};q)_\infty}{(q,q;q)_\infty}\frac{q^{-\nu/2}}{(-x^2/4;q)_\infty};$$

en d'autres termes, le p-wronskien du couple de solutions $(J_\nu^{(1)}(x;q), J_{-\nu}^{(1)}(x;q))$ et la fonction $(-x^2/4;q)_\infty$ sont inversement proportionnels. On en déduit que les fonctions $J_\nu^{(1)}(x;q)$, $J_{-\nu}^{(1)}(x;q)$ constituent un *système fondamental de solutions de* (3) au point à l'origine. Le reste de notre article a pour objectif initial d'établir la formule de connexion entre ce système de solutions et *le* système de solutions à l'infini, tout en sachant que deux systèmes fondamentaux de solutions d'une même équation aux q-différences linéaire peuvent être connectés par une matrice composée de *fonctions q-périodiques*; voir les coefficients $C_j(x)$ de (0.2) ci-dessus.

Décrivons brièvement le contenu de la suite de notre article. Dans les § 1 et § 2, nous appliquerons une transformation de Borel–Laplace q-analogue à l'équation q-Bessel (0.3) près du point à l'infini et nous obtiendrons un système fondamental de solutions au voisinage de l'infini; le résultat central est le théorème 1.4 et celui-ci donnera immédiatement la formule de connexion voulue, exprimée dans le Théorème 2.1. Dans § 3, après avoir dégagé un rapport entre cette formule de connexion et la formule de Watson (0.2) rappelée ci-dessus, nous expliquerons comment en déduire, par passage à la limite avec $q \to 1^-$, la somme de Borel des séries hypergéométriques confluentes de la forme ${}_2F_0$ relatives aux équations différentielles de Bessel. Dans le paragraphe 4, la seconde famille des fonctions q-Bessel $J_\nu^{(2)}(x;q)$ sera considérée comme transformée de q-Borel–Laplace de la famille $J_\nu^{(1)}(x;q)$; ce point de vue nous permet de développer, comme dans [4], les $J_\nu^{(2)}(x;q)$ à l'infini (voir (4.7)). Dans le dernier paragraphe, nous ferons quelques commentaires sur des sujets connexes à ce présent travail : localisation des zéros de $J_\nu^{(2)}(x;q)$, fonctions trigonométriques q-analogues, *etc*.

1. Résoudre l'équation (0.3) à l'aide d'une transformation de q-Borel–Laplace

Posons $t = 1/x$ et $y(x) = z(t)$; l'équation (0.3) s'écrit sous la forme

$$\left\{\sigma_q^{-1} - (q^{\nu/2} + q^{-\nu/2})\sigma_p^{-1} + \left(1 + \frac{1}{4t^2}\right)\right\}z(t) = 0;$$

on en déduit celle-ci:

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{4q^2t^2}\right)\sigma_q - (q^{\nu/2} + q^{-\nu/2})\sigma_p + 1\right\}z(t) = 0, \tag{1.1}$$

où $t = 0$ est un point singulier irrégulier. Nous allons chercher des solutions sous forme du produit d'une *fonction q-exponentielle* (*modifiée*) par une série entière en t.

Utilisons la fonction thêta de Jacobi comme fonction q-exponentielle et posons

$$\theta_p(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} p^{n(n-1)/2}t^n\left(= \sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{n(n-1)/4}t^n\right).$$

La série $\theta_p(t)$ définit une fonction analytique sur $\mathbf{C}^*$, ayant $-p^{\mathbf{Z}}$ $(=\{-p^m : m\in\mathbf{Z}\})$ pour ensemble de zéros et vérifiant la relation fonctionnelle $t\theta_p(pt) = \theta_p(t)$.

Si l'on pose, pour tout $\alpha\in\mathbf{C}^*$:

$$\mathscr{E}_\alpha(t) = \frac{1}{\theta_p(-\alpha t)} \quad \forall\ t\notin\frac{1}{\alpha}p^{\mathbf{Z}},$$

on obtient une fonction méromorphes sur $\mathbf{C}^*$ et ayant $\frac{1}{\alpha}p^{\mathbf{Z}}$ pour ensemble de pôles; compte tenu de la relation $t\theta_p(pt) = \theta_p(t)$, on a;

$$\sigma_p\mathscr{E}_\alpha(t) = -\alpha t\mathscr{E}_\alpha(t), \quad \sigma_q\mathscr{E}_\alpha(t) = \alpha^2\sqrt{q}t^2\mathscr{E}_\alpha(t).$$

Choisissons α *de manière d'avoir* $\alpha^2\sqrt{q}\frac{1}{4q^2} = -1$, *i.e.* $\alpha = 2q^{3/4}i$ ou $\alpha = -2q^{3/4}i$; substituant $z(t) = \mathscr{E}_\alpha(t)f(t)$ dans l'équation (1.1), on est conduit à l'équation

$$\{-(1 + 4q^2t^2)\sigma_q + \alpha(q^{\nu/2} + q^{-\nu/2})t\sigma_p + 1\}f(t) = 0, \tag{1.2}$$

laquelle admet des séries entières en t pour solution.

Considérons $f_\alpha(t) = \sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ la série entière solution de (1.2) et telle que $a_0 = 1$; posons $g_\alpha(\tau)$ la série définie par

$$g_\alpha(\tau) = \mathscr{B}_{p;1} f_\alpha(\tau) := \sum_{n\geqslant 0} a_n p^{-n(n-1)/2}\tau^n,$$

laquelle correspond formellement, dans la terminologie employée dans [14,15], à la transformée de "p-Borel" d'ordre un de f_α (mais ici $0<p<1$!). En vertu de la relation "opérationnelle"

$$\mathscr{B}_{p;1}(t^m \sigma_p^\ell) = p^{-m(m-1)/2}\tau^m \sigma_p^{\ell-m}\mathscr{B}_{p;1} \quad \forall \ell,\ m \in \mathbf{N},$$

on trouve que g_α satisfait à l'équation

$$g_\alpha(q\tau) = (1 + \alpha(q^{\nu/2} + q^{-\nu/2})\tau - 4q^{3/2}\tau^2)g(\tau).$$

Puisque $\alpha^2 = -4q^{3/2}$ et $0<q<1$, par itération on obtient:

$$g_\alpha(\tau) = \frac{1}{(-\alpha q^{\nu/2}\tau; q)_\infty (-\alpha q^{-\nu/2}\tau; q)_\infty}, \tag{1.3}$$

ce qui montre que la fonction g_α est méromorphe sur $\mathbf{C}$, avec

$$\left\{ -\frac{q^{\nu/2-n}}{\alpha}, -\frac{q^{-\nu/2-n}}{\alpha} : n \in \mathbf{N} \right\}$$

comme ensemble des pôles, simples. Par conséquent, f_α *est une fonction entière*.

Théorème 1.4. *Conservant les notations et hypothèses ci-dessus, on a:*

$$f_\alpha(t) = \frac{\theta_p(-\alpha q^{\nu/2} t)}{(q, q^{-\nu}; q)_\infty} {}_2\varphi_1\left(0, 0; q^{\nu+1}; q, -\frac{x^2}{4}\right) + \\ + \frac{\theta_p(-\alpha q^{-\nu/2} t)}{(q, q^{\nu}; q)_\infty} {}_2\varphi_1\left(0, 0; q^{-\nu+1}; q, -\frac{x^2}{4}\right)$$

où $xt = 1$ *et* $|x|<2$.

Preuve. D'après la définition de g_α, la fonction f_α peut être vue comme le produit de Hadamard de g_α avec la fonction θ_p; par la formule de Cauchy et le théorème des résidus on trouve:

$$\begin{aligned} f_\alpha(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=r} g_\alpha(\tau)\theta_p\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau} \\ &= -\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Res}\left\{ g_\alpha(\tau)\theta_p\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{1}{\tau} : \tau = -\frac{q^{\nu/2-n}}{\alpha}\right\} \\ &\quad - \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Res}\left\{ g_\alpha(\tau)\theta_p\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{1}{\tau} : \tau = -\frac{q^{-\nu/2-n}}{\alpha}\right\}, \end{aligned}$$

où $0<r<r_0 := \max\{q^{\nu/2}/|\alpha|, q^{-\nu/2}/|\alpha|\}$. La dernière égalité peut être justifiée de la manière suivante: à chaque entier naturel N on associe dans le plan des τ le cercle $\mathscr{C}_N$, positivement orienté et ayant $|\tau| = q^{-N-1/2}r_0$ pour équation; on applique ensuite

le théorème des résidus à l'intégrale de contour

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\mathscr{C}_N} - \int_{|\tau|=r}\right) g_\alpha(\tau)\theta_p\left(\frac{t}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau};$$

avec un résultat établi dans [9,14, Lemme 4.3.7], on minore sur les cercles $\mathscr{C}_N$ la fonction entière d'ordre zéro $\tau \mapsto 1/g_\alpha(\tau)$, ce qui implique que la limite de l'intégrale précédente effectuée sur ces cercles, quand N augmente indéfiniment, vaut zéro pourvu que le module de $|t|$ soit suffisamment grand.

On complète la preuve par des calculs des résidus, avec les formules suivantes ($n \in \mathbf{N}$, $\lambda \in \mathbf{C}^*$):

$$\theta_p(p^n t) = p^{-n(n-1)/2} t^{-n} \theta_p(t),$$

$$\operatorname{Res}\left\{\frac{1}{(\tau/\lambda; q)_\infty}\frac{1}{\tau} : \tau = \lambda q^{-n}\right\} = \frac{(-1)^{n+1} q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_\infty (q;q)_n},$$

$$\frac{1}{(\lambda q^{-n}; q)_\infty} = \frac{(-\lambda)^{-n} q^{n(n+1)/2}}{(\lambda; q)_\infty (q/\lambda; q)_n} \quad (\lambda \notin q^{\mathbf{Z}}). \qquad \square \tag{1.5}$$

Dans le théorème précédent, $f_\alpha(-t) = f_{-\alpha}(t)$; en outre, on établit aisément le

Corollaire 1.6. *On a:*

$${}_2\varphi_1\left(0, 0; q^{\nu+1}; q, -\frac{x^2}{4}\right) = \frac{(q, q^{-\nu}; q)_\infty (\theta_p(-\alpha q^{-\nu/2} t) f_\alpha(t) - \theta_p(\alpha q^{-\nu/2} t) f_\alpha(-t))}{\theta_p(-\alpha q^{\nu/2} t)\theta_p(\alpha q^{-\nu/2} t) - \theta_p(\alpha q^{\nu/2} t)\theta_p(-\alpha q^{-\nu/2} t)}$$

où $xt = 1$ *et* $0 < |x| < 2$.

2. Formule de connexion pour l'équation (0.3)

Les fonctions $J_\nu^{(1)}(x;q)$, $J_{-\nu}^{(1)}(x;q)$ introduites par F.H. Jackson constituent une base de solution en $x = 0$ pour l'équation (0.3). En vue d'obtenir des formules de connexion exprimées au moyen de fonctions p-périodiques et uniformes (donc, *p-elliptiques*), nous nous proposons de considérer les fonctions $J_{\nu,\lambda}^{(1)}$, $J_{-\nu,\lambda}^{(1)}$ définies ci-dessous: posons, pour tout nombre complexe non nul λ:

$$J_{\nu,\lambda}^{(1)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\frac{\theta_p(\lambda q^{\nu/2}/x)}{\theta_p(\lambda/x)}\,{}_2\varphi_1\left(0,0;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4}\right),$$

la définition de $J_{-\nu,\lambda}^{(1)}$ étant similaire (changer ν en $-\nu$). Puisque $t\theta_p(pt) = \theta_p(t)$, la fonction $x \mapsto \frac{\theta_p(\lambda q^{\nu/2}/x)}{\theta_p(\lambda/x)}$ satisfait à la même équation aux q-différences que $x \mapsto x^\nu$; on en déduit que, étant donné un nombre complexe non nul λ, le couple

$(J_{\nu,\lambda}^{(1)}(x;q), J_{-\nu}, \lambda(x;q)^{(1)})$ constitue, pour l'équation (0.3), un système fondamental de solutions méromorphes dans le disque pointé $0<|x|<2$.

Soient les fonctions $f_\alpha(t)$ $(\alpha = \pm 2q^{3/4}i)$ étudiées dans le paragraphe précédent, dépendant du paramètre ν; posons

$$j_{\nu,\alpha}^{(1)}(t;q) = \frac{(q^{1/2}, q^{1/2}; q)_\infty}{\theta_p(-\alpha t)} f_\alpha(t);$$

on a les "symétries"

$$j_{-\nu,\alpha}^{(1)}(t;q) = j_{\nu,\alpha}^{(1)}(t;q) = j_{\nu,-\alpha}^{(1)}(-t;q);$$

par ailleurs, on remarquera que les fonctions $j_{\nu,\alpha}^{(1)}(t;q), j_{\nu,-\alpha}^{(1)}(t;q)$ forment un système de solutions méromorphes dans le plan $\mathbf{C}^*$.

Posons enfin:

$$C_{\nu,\alpha}(\lambda, t; q) = \frac{(q^{1/2}, q^{1/2}; q)_\infty \theta_p(-\alpha q^{\nu/2} t)\theta_p(\lambda t)}{(q^{1+\nu}, q^{-\nu}; q)_\infty \theta_p(-\alpha t)\theta_p(\lambda q^{\nu/2} t)};$$

ceci définit une famille de fonctions p-elliptiques en t, c'est-à-dire:

$$C_{\nu,\alpha}(\lambda, te^{2\pi i}; q) = C_{\nu,\alpha}(\lambda, t; q), \quad C_{\nu,\alpha}(\lambda, pt; q) = C_{\nu,\alpha}(\lambda, t; q).$$

Théorème 2.1 (Formule de connexion). *On a:*

$$\begin{pmatrix} j_{\nu,\alpha}^{(1)}(t;q) \\ j_{\nu,-\alpha}^{(1)}(t;q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{\nu,\alpha}(\lambda, t; q) & C_{-\nu,\alpha}(\lambda, t; q) \\ C_{\nu,-\alpha}(\lambda, t; q) & C_{-\nu,-\alpha}(\lambda, t; q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\nu,\lambda}^{(1)}(x;q) \\ J_{-\nu,\lambda}^{(1)}(x;q) \end{pmatrix}$$

où $\lambda \in \mathbf{C}^*$, $xt = 1$ *et* $0<|x|<2$.

Preuve. Ceci n'est qu'une réécriture du théorème 1.4. □

Discutons maintenant du passage à la limite, quand q tend vers 1, du théorème 2.1. Pour ceci, on a besoin notamment de connaître du comportement asymptotique de la fonction $\theta_q(x)$ $(= \sum_{n\in\mathbf{Z}} q^{n(n-1)/2} x^n)$ pour q infiniment proche de 1. Notons d'abord l'équation fonctionnelle

$$\theta_q(\sqrt{q}x) = \sqrt{-2\pi/\ln q}\, e^{-\frac{1}{2\ln q}(\log x)^2} \theta_{q^*}(\sqrt{q^*}x^*), \tag{2.2}$$

où l'on utilise la transformation $(q, x) \mapsto (q^*, x^*)$ définie par

$$q^* = e^{4\pi^2/\ln q}, \quad x^* = e^{-\frac{2\pi i}{\ln q}\log x},$$

log désignant la détermination principale du logarithme sur la surface de Riemann de celui-ci notée $\tilde{\mathbf{C}}^*$. En posant, pour tous $q \in]0,1[$ et $x \in \tilde{\mathbf{C}}^*$:

$$T_q(x) = (-\ln q/(2\pi))^{1/4} e^{(\log x)^2/(4\ln q)} \theta_q(\sqrt{q}x),$$

on constate aussitôt que (2.2) équivaut à la relation suivante:

$$T_q(x) = T_{q^*}(x^*),$$

qui peut être obtenue, c'est un grand classique, avec la formule sommatoire de Poisson (cf. [8, p. 244; 12, 69]). Remarquons en passant que (2.2) représente une formule de connexion entre *les deux solutions types*—qui sont $\theta_q(\sqrt{q}x)$ et $e^{-(\log x)^2/(2\ln q)}$—de la même équation aux q-différences $\sqrt{q}xy(qx) = y(x)$, la fonction $x \mapsto \theta_{q^*}(\sqrt{q^*}x^*)$ étant en fait *q-périodique*.

A l'aide de la formule (2.2) (où $q^* \to 0$ si $q \to 1$) et/ou la formule du binôme basique, on peut établir la

Proposition 2.3 ([6, p. 9; 12, p. 71 et 74]). *Soient γ, β deux nombres complexes non nuls et soit log la détermination principale du logarithme dans le plan coupé $\mathbf{C}\backslash]-\infty, 0]$. On a les assertions suivantes.*

(1) *Pour tout $x \in \mathbf{C}\backslash]-\infty, 0]$, on a:*

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{\theta_q(q^\gamma/x)}{\theta_q(q^\beta/x)} = x^{\gamma-\beta} \equiv e^{(\gamma-\beta)\log x};$$

la convergence étant uniforme sur tout compact du plan coupé $\mathbf{C}\backslash]-\infty, 0]$.

(2) *Pour tout $x \in \mathbf{C}\backslash[1, +\infty[$, on a:*

$$\lim_{q\to 1^{-1}} \frac{(q^\gamma x; q)_\infty}{(x; q)_\infty} = (1-x)^{-\gamma} \equiv e^{-\gamma \log(1-x)},$$

la convergence étant uniforme sur tout compact du plan coupé $\mathbf{C}\backslash[1, +\infty[$.

Comme cas limite du résultat (2) ci-dessus, on a la limite suivante de la fonction q-Gamma de Jackson (cf. [2]):

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{(q^{\gamma+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} (1-q)^\gamma = \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}, \tag{2.4}$$

laquelle implique la limite

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{(q^{1/2}, q^{1/2}; q)_\infty}{(q, q^{-\nu}; q)_\infty} (1-q)^\nu = \frac{\Gamma(-\nu)}{\Gamma(1/2)\ \Gamma(1/2)} = -\frac{1}{\sin(\nu\pi)\Gamma(\nu+1)}. \tag{2.5}$$

Avec la formule (2.2), on établit la version suivante de la proposition 2.3:

$$\begin{aligned} &\lim_{q\to 1^-} \frac{\theta_q(q^\gamma/((1-q)x))}{\theta_q(q^\beta/((1-q)x))} (1-q)^{\beta-\gamma} \\ &\quad = \lim_{q\to 1^-} \frac{(-q^\gamma/((1-q)x); q)_\infty}{(-q^\beta/((1-q)x); q)_\infty} (1-q)^{\beta-\gamma} = x^{\gamma-\beta} \end{aligned} \tag{2.6}$$

pour tout $x \in \mathbf{C}\backslash]-\infty, 0]$.

Revenons à la formule de connexion énoncée dans le Théorème 2.1, substituons à x $(1-q)x$ et à t $t/(1-q)$ respectivement; pour alléger l'exposé, **fixons** $\alpha = 2q^{3/4}i$ et considérons seulement le cas où $\lambda = \alpha = 2q^{3/4}i$. On rappelle que les fonctions de

Bessel J_ν sont données par:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \ {}_0F_1\left(-; \nu+1; -\frac{x^2}{4}\right).$$

Théorème 2.7. *Soient $\lambda = \alpha = 2q^{3/4}i$ dans le théorème 2.1. On a les assertions suivantes.*

(1) *Si* $\arg x \in]-3\pi/2, \pi/2[$, *on a:*

$$\lim_{q\to 1^-} j_{\nu,\alpha}^{(1)}\left(\frac{t}{1-q}; q\right) = \frac{-e^{\nu\pi i/2}J_\nu(x) + e^{-\nu\pi i/2}J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)},$$

la convergence étant uniforme sur tout compact du secteur $-3\pi/2 < \arg x < \pi/2$.

(2) *Si* $\arg x \in]-\pi/2, 3\pi/2[$, *on a:*

$$\lim_{q\to 1^-} j_{\nu,-\alpha}^{(1)}\left(\frac{t}{1-q}; q\right) = \frac{-e^{-\nu\pi i/2}J_\nu(x) + e^{\nu\pi i/2}J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)},$$

la convergence étant uniforme sur tout compact du secteur $-\pi/2 < \arg x < 3\pi/2$.

Preuve. Nous ne démontrons que la première assertion, la deuxième s'en déduisant trivialement avec la relation $j_{\nu,-\alpha}^{(1)}(t;q) = j_{\nu,-\alpha}^{(1)}(-t;q)$. Nous laisserons au lecteur le soin de vérifier le caractère uniforme de la convergence évoquée dans le reste de la démonstration.

D'après le Théorème 2.1 ou sa version initiale 1.4, on peut décomposer $j_{\nu,\alpha}^{(1)}(t/(1-q);q)$ sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} j_{\nu,\alpha}^{(1)}&\left(\frac{t}{1-q}; q\right) \\ &= \frac{(q^{1/2}, q^{1/2}; q)_\infty}{(q, q^{-\nu}; q)_\infty} \frac{\theta_p(-\alpha q^{\nu/2} t/(1-q))}{\theta_p(-\alpha t/(1-q))} {}_2\varphi_1\left(0, 0; q^{\nu+1}; q, -\frac{(1-q)^2x^2}{4}\right) + \\ &+ \frac{(q^{1/2}, q^{1/2}; q)_\infty}{(q, q^{\nu}; q)_\infty} \frac{\theta_p(-\alpha q^{-\nu/2} t/(1-q))}{\theta_p(-\alpha t/(1-q))} {}_2\varphi_1\left(0, 0; q^{-\nu+1}; q, -\frac{(1-q)^2x^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Quand $q \to 1$, on a $p \to 1$ et $1-q \approx 2(1-p)$; avec (2.6) ou (2.2), on trouve ($x = 1/t$):

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{\theta_p(-\alpha q^{\nu/2} t/(1-q))}{\theta_p(-\alpha t/(1-q))} (1-q)^{-\nu} = e^{\nu\pi i/2} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu$$

pour tout $x \in \tilde{\mathbf{C}}^*$ tel que $\arg(ix) \in]-\pi, \pi[$: i.e $\arg x \in]-3\pi/2, \pi/2[$ avec $i = e^{\pi i/2}$. La preuve s'achève avec (2.5) et la limite évidente suivante:

$$\lim_{q\to 1^-} {}_2\varphi_1\left(0, 0; q^{\nu+1}; q, -\frac{(1-q)^2x^2}{4}\right) = {}_0F_1\left(-; \nu+1; -\frac{x^2}{4}\right). \quad \square$$

Soient $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$ les fonctions de Hankel définies respectivement sur $-\pi/2<\arg x<3\pi/2$, $-3\pi/2<\arg x<\pi/2$ par [13, 6.11 (3–4); 11, (3.4.8)]; on a, d'après [13, 3.6 (2)]:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{J_{-\nu}(x) - e^{-\nu\pi i}J_\nu(x)}{i\sin(\nu\pi)}, \quad H_\nu^{(2)}(x) = \frac{J_{-\nu}(x) - e^{\nu\pi i}J_\nu(x)}{-i\sin(\nu\pi)}.$$

On peut alors traduire le théorème 2.7 de la façon suivante:

$$\lim_{q\to 1^-} j_{\nu,\alpha}^{(1)}\left(\frac{t}{1-q};q\right) = ie^{-\nu\pi i/2}H_\nu^{(2)}(x),$$
$$\lim_{q\to 1^-} j_{\nu,-\alpha}^{(1)}\left(\frac{t}{1-q};q\right) = ie^{\nu\pi i/2}H_\nu^{(1)}(x). \tag{2.8}$$

3. Une expression explicite de f_α conduisant à la série divergente ${}_2F_0(\nu+1/2,-\nu+1/2;—;\pm it/2)$

Rappelons que f_α est, par définition, l'unique série entière solution de l'équation (1.2) et telle que le terme constant soit égal à un.

Proposition 3.1. *On a:*

$$f_\alpha(\sqrt{p}t) = (\alpha t;p)_\infty 2\varphi_1(p^{\nu+1/2},p^{-\nu+1/2};-p;p,\alpha t).$$

Preuve. Substituons t à $\sqrt{p}t$ puis $(\alpha t;p)_\infty u(t)$ à $f(\sqrt{p}t)$ dans la relation (1.2), mettons ensuite $(1-p\alpha t)$ comme facteur commun; on obtient l'équation

$$\{-(1+p\alpha t)\sigma_q + (p^{\nu+1/2}+p^{-\nu+1/2})p\alpha t)\sigma_p + (1-\alpha t)\}u(t) = 0.$$

Si $u(t) = \sum_{n\geqslant 0} u_n(\alpha t)^n$ avec $u_n\in\mathbf{C}$, on a la relation de récurrence $(n\geqslant 1)$

$$(1+p^n)(1-p^n)u_n = (1-p^{\nu+1/2+n-1})(1-p^{-\nu+1/2+n-1})un-1,$$

laquelle permet de completer la preuve. $\square$

Par conséquent, pour reconstituer le théorème 1.4 il suffit d'appliquer à la fonction ${}_2\varphi_1(p^{\nu+1/2},p^{-\nu+1/2};-p;p,\alpha t)$ la formule de Watson (0.2) et ensuite utiliser la relation suivante.

Lemme 3.2. *Soit $p=\sqrt{q}$. On a:*

$$(x;p)_\infty 2\varphi_1(0,0;q^{\nu+1};q,-x^2) =_2 \varphi_1(p^{\nu+1/2},-p^{\nu+1/2};p^{2\nu+1};p,-x).$$

Preuve. Avec $\mathscr{D}_q = \frac{\sigma_q-1}{(q-1)x}$, on écrit l'équation (0.1) sous la forme suivante:

$$\{(c-abqx)\sigma_q^2 - [(c+q)-(a+b)qx]\sigma_q + q(1-x)\}u = 0;$$

on peut vérifier que, si $c \notin \{1, 1/q, 1/q^2, \dots\}$, la fonction ${}_2\varphi_1(a, b; c; q, x)$ est l'*unique* solution de cette équation analytique qui vaut 1 au point $x = 0$. Le lemme en découle immédiatement car les fonctions

$$ {}_2\varphi_1(p^{\nu+1/2}, -p^{\nu+1/2}; p^{2\nu+1}; p, -x), \quad (x; p)_\infty 2\varphi_1(0, 0; q^{\nu+1}; q, -x^2) $$

satisfont toutes deux à l'équation

$$ \{(1 - px)\sigma_q - (1 + p^{-2\nu})\sigma_p + p^{-2\nu}(1 + x)\}y = 0. \qquad \square $$

Avec (3.1), la définition de la fonction $j^{(1)}_{\nu,\alpha}$ (cf. § 2) devient:

$$ j^{(1)}_{\nu,\alpha}(t; q) = \frac{(p; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \frac{\theta_p(-\alpha p^{-1/2} t)}{\theta_p(-\alpha t)} \frac{1}{(p^{3/2}/(\alpha t); p)_\infty} \, {}_2\varphi_1(p^{\nu+1/2}, p^{-\nu+1/2}; -p; p, \alpha p^{-1/2} t). $$

Jusqu'à la fin du paragraphe, fixons $\alpha = 2q^{3/4} i$. On rappelle que $x = 1/t$.

Observons en premier lieu que, si $q \to 1^-$, on a la convergence formelle (i.e. terme à terme):

$$ {}_2\varphi_1\left(p^{\nu+1/2}, p^{-\nu+1/2}; -p; p, \frac{\alpha p^{-1/2} t}{1 - q}\right) \to {}_2F_0\left(\nu + 1/2, -\nu + 1/2; —; -\frac{1}{2ix}\right). $$

Notons également que, d'après la formule du binôme basique, on a:

$$ \lim_{q \to 1^-} \frac{1}{(p^{3/2}(1 - q)/(\alpha t); p)_\infty} = e^{-ix} \tag{3.3} $$

pour tout $x \in \mathbf{C}^*$. En utilisant (2.4) (avec $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$) et (2.6), on trouve:

$$ \lim_{q \to 1^-} \frac{(p; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \frac{\theta_p(-\alpha p^{-1/2} t/(1 - q))}{\theta_p(-\alpha t/(1 - q))} = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} e^{-\pi i/4} \tag{3.4} $$

pour tout $t \in \mathbf{C}^*$ tel que $\arg t \in]-\pi/2, 3\pi/2[$ (donc, $\arg x \in]-3\pi/2, \pi/2[$). En somme, on vient de vérifier que, lorsque $\alpha = 2q^{3/4} i$, $\arg x \in]-3\pi/2, \pi/2[$ et $q \to 1^-$, la fonction $j^{(1)}_{\nu,\alpha}(t/(1 - q); q)$ admet pour "limite formelle" l'expression

$$ \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} e^{-ix - \pi i/4} \, {}_2F_0\left(\nu + 1/2, -\nu + 1/2; —; -\frac{1}{2ix}\right). $$

La série ${}_2F_0(\nu + 1/2, -\nu + 1/2; —; -\frac{1}{2ix})$ étant Borel-sommable dans toute direction sauf $\arg x = \pi/2$ modulo 2π, sa somme de Borel notée $u(\nu; x)$ est fournie dans le secteur $-2\pi < \arg x < \pi$ par ([13, 7.2 (8); 11, Théorème 3.4.1]):

$$ u(\nu; x) = \left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/2} e^{(x - \nu\pi/2 - \pi/4)i} H^{(2)}_\nu(x). \tag{3.5} $$

Théorème 3.6. *Pour tout* $x \in \tilde{\mathbf{C}}^*$ *tel que* $\arg x \in]-3\pi/2, \pi/2[$, *on a:*

$$\lim_{q \to 1^-} {}_2\varphi_1\left(p^{\nu+1/2}, p^{-\nu+1/2}; -p; p, \frac{\alpha p^{-1/2} t}{1-q}\right) = u(\nu; x),$$

la convergence étant uniforme sur tout compact du secteur $-3\pi/2 < \arg x < \pi/2$.

Preuve. Il suffit de combiner (2.8) et (3.3)–(3.5). □

Remarquons que l'on pourrait démontrer ce dernier théorème au moyen d'une intégrale du type Barnes-Mellin pour la fonction ${}_2\varphi_1(\ldots)$ en question.

4. Les fonctions q-Bessel $J_\nu^{(2)}(x;q)$ vues comme transformées de q-Borel–Laplace de $J_\nu^{(1)}(x;q)$

Une seconde famille de fonctions q-Bessel introduite par F.H. Jackson est la suivante:

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu {}_0\varphi_1\left(-; q^{\nu+1}; q, -\frac{x^2 q^{\nu+1}}{4}\right),$$

où $x \in \tilde{\mathbf{C}}^*$ et où la série hypergéométrique basique ${}_0\varphi_1(\ldots)$, de rayon de convergence infini, est définie par

$${}_0\varphi_1(-; c; q, x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{q^{n(n-1)}}{(q;q)_n (c;q)_n} x^n \quad (c \notin q^{-\mathbf{N}}).$$

Par un calcul directe, on peut vérifier que la fonction $J_\nu^{(2)}(x;q)$ est solution de l'équation aux q-différences ([6, p. 25; 7, (1.17)])

$$\left\{\left(1 + q\frac{x^2}{4}\right)\sigma_q - (q^{\nu/2} + q^{-\nu/2})\sigma_p + 1\right\} y(x) = 0, \tag{4.1}$$

pour laquelle $J_{-\nu}^{(2)}(x;q)$ est aussi solution.

D'après W. Hahn (cf. [6, p. 25]), on a la relation

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = (-x^2/4;q)_\infty \; J_\nu^{(1)}(x;q), \quad |x| < 2; \tag{4.2}$$

celle-ci équivaut à dire que la transformation $y \mapsto (-x^2/4;q)_\infty y$ permet de passer de l'équation (0.3), satisfaite par $J_\nu^{(1)}(x;q)$, à l'équation (4.1) de $J_\nu^{(2)}(x;q)$. Puisque

$$(-x^2/4;q)_\infty = (ix/2, -ix/2; p)_\infty,$$

avec la relation (3.2) on en déduit que

$${}_0\varphi_1\left(-; q^{\nu+1}; q, -\frac{x^2 q^{\nu+1}}{4}\right) = (ix/2;p)_\infty 2\varphi_1(p^{\nu+1/2}, -p^{\nu+1/2}; p^{2\nu+1}; p, ix/2),$$

ce qui donne, grâce à la formule de Watson (0.2):

$$
\begin{aligned}
&{}_0\varphi_1\left(-;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2q^{\nu+1}}{4}\right)\\
&\quad=\frac{1}{2(q,q^{\nu+1};q)_\infty}\left(\frac{\theta_p(-p^{\nu+1/2}ix/2)}{(2p/(ix);p)_\infty}\,{}_2\varphi_1(p^{\nu+1/2},p^{-\nu+1/2};-p;p,-2p/(ix))\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\theta_p(p^{\nu+1/2}ix/2)}{(2p/(ix);p)_\infty}\,{}_2\varphi_1(-p^{\nu+1/2},-p^{-\nu+1/2};-p;p,-2p/(ix))\right). \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

On remarquera que, d'après la formule (1.4.3) de [6, p. 10], on a:

$$
\begin{aligned}
&(-2p/(ix);p)_\infty 2\varphi_1(-p^{\nu+1/2},-p^{-\nu+1/2};-p;p,-2p/(ix))\\
&\quad=(2p/(ix);p)_\infty 2\varphi_1(p^{\nu+1/2},p^{-\nu+1/2};-p;p,2p/(ix)). \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

Un point de vue adopté ici consiste à regarder les fonctions $J_\nu^{(2)}(x;q)$ comme transformées de q-Borel–Laplace de $J_\nu^{(2)}(x;q)$. Cela permettra de développer, en quelque sorte, $J_\nu^{(2)}(x;q)$ en somme de deux séries entières dont les coefficients sont des valeurs prises par $J_\nu^{(2)}(x;q)$ en des points "entiers" ; voir (4.7) plus loin.

Comme dans [14], appelons *transformation de p-Laplace d'ordre un* (ou de q-Laplace d'ordre 1/2) l'automorphisme $\mathscr{L}_{p;1}$ de l'espace **C**-vectoriel **C**[[x]] qui envoie tout monôme x^n en $p^{n(n-1)/2}x^n$. On a:

$$
\mathscr{L}_{p;1}\ {}_2\varphi_1\left(0,0;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4}\right)={}_0\varphi_1\left(-;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2q^{1/2}}{4}\right),
$$

ce qui implique, avec (4.2), la relation

$$
{}_0\varphi_1\left(-;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2q^{1/2}}{4}\right)=\mathscr{L}_{p;1}\left(\frac{{}_0\varphi_1(-;q^{\nu+1};q,-x^2q^{\nu+1}/4)}{(-x^2/4;q)_\infty}\right). \qquad (4.5)
$$

Pour abréger, notons

$$
\varphi_\nu(x)={}_0\varphi_1\left(-;q^{\nu+1};q,-\frac{x^2}{4}\right).
$$

C'est une fonction entière qui admet à l'infini une croissance "p-exponentielle d'ordre un": il existe un $\mu>0$ tel que $\varphi_\nu(x)=O(e^{(\ln|x|)^2/(2\ln(1/p))}|x|^\mu)$ lorsque $|x|\to+\infty$.

D'une façon tout-à-fait analogue à ce que l'on a fait dans la preuve du théorème 1.4, on déduit de la relation (4.5) les égalités suivantes:

$$
\begin{aligned}
\varphi_\nu(\sqrt{p}x)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{\varphi_\nu(p^{\nu+1}\xi)}{(-\xi^2/4;q)_\infty}\theta_p\left(\frac{x}{\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi}\\
&\overset{(*)}{=}-\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{Res}\left(\frac{\varphi_\nu(p^{n+1}\xi)}{(i\xi/2;p)_\infty\ (-i\xi/2;p)_\infty}\theta_p\left(\frac{x}{\xi}\right)\frac{1}{\xi}:\xi=\pm 2ip^{-n}\right)
\end{aligned}
$$

$$\overset{(**)}{=} \frac{1}{2(q;q)_\infty}\left(\theta_p\left(-\frac{ix}{2}\right)\sum_{n\geqslant 0}\frac{p^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}\varphi_v(2ip^{v+1-n})\ \left(-\frac{2pi}{x}\right)^n\right.$$

$$\left.+\theta_p\left(\frac{ix}{2}\right)\sum_{n\geqslant 0}\frac{p^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n}\varphi_v(-2ip^{v+1-n})\left(\frac{2pi}{x}\right)^n\right). \tag{4.6}$$

Ici, le rayon r est choisi plus petit que 2; l'égalité (*) résulte du théorème des résidus car, pour tout (paramètre) x de module assez grand, l'intégrand est une fonction du type $O(|\xi|^{-2})$ quand $|\xi| = 2p^{-n+1/2}\to\infty$ (un argument du à Littlewood); et l'on obtient le passage (**) en réactualisant les formules (1.5).

La fonction $x\mapsto\varphi_v(x)$ étant paire, on a, dans (4.6), $\varphi_v(2ip^{v+1-n}) = \varphi_v(-2ip^{v+1-n})$ pour tout $n\in\mathbf{N}$. Quand $n=0$, on obtient:

$$\varphi_v(2ip^{v+1}) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{q^{n(n-1)}}{(q,q^{v+1};q)_\infty}q^{(v+1)n} = \frac{1}{(q^{v+1};q)_\infty},$$

d'après la formule (1.5.1) de [6, p. 10] (avec $c = q^{v+1}$, a et b tendant vers l'infini).

Cela étant, posons $t = 1/x$ et associons, à chaque $\alpha\in\{2q^{3/4}i, -2q^{3/4}i\}$ (*ces α étant déjà choisis dans* § 1!), la série entière de t:

$$h_\alpha(t) = (q^{v+1};q)_\infty\sum_{n\geqslant 0}\frac{p^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n}\varphi_v(2ip^{v+1-n})\ p^{-vn}\ (\alpha t)^n;$$

elle vaut 1 au point $t=0$ et son rayon de convergence est au moins égal à $1/2$. Vu la relation $\theta_p(px) = \theta_p(1/x)$, on peut écrire (4.6) sous la forme

$$\varphi_v(p^{v+1}x) = \frac{1}{2(q,q^{v+1};q)_\infty}(\theta_p(-\alpha p^{-v-1}t)h_\alpha(t) + \theta_p(\alpha p^{-v-1}t)\ h_\alpha(-t));$$

autrement dit, on a:

$$J_v^{(2)}(x;q) = \frac{1}{2(q,q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^v(\theta_p(-\alpha p^{-v-1}t)h_\alpha(t) + \theta_p(\alpha p^{-v-1}t)\ h_\alpha(-t)). \tag{4.7}$$

Du fait que $\varphi_v(p^{v+1}x)$ vérifie également la relation (4.3), on déduit, avec (4.4), l'expression suivante:

$$h_\alpha(t) = \frac{{}_2\varphi_1(p^{v+1/2},p^{-v+1/2};-p;p,-\alpha p^{-1/2}t)}{(\alpha p^{-1/2}t;p)_\infty}.$$

Par identification de coefficients de $h_\alpha(t)$, on établit la

Proposition 4.8. *Pour tout $n\in\mathbf{N}$, on a:*

$${}_0\varphi_1(-;q^{v+1};q,q^{v+1-n}) = \frac{(q;q)_n p^{-n(n-2v)/2}}{(q^{v+1};q)_\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m(p^{v+1/2},p^{-v+1/2};p)_m}{(q;q)_m(p;p)n-m}.$$

Remarquons que la relation (4.7) est exactement la formule [4, (1.10)]. En effet, d'après la transformation de Jackson [6, (III.5), p. 241], la fonction $f(x,a;q)$ définie par [4, (1.9)] peut s'écrire sous la forme suivante ($p=\sqrt{q}$):

$$f(x,a;q)=\frac{\theta_p(-iax)}{(p,\frac{q}{ix};q)_\infty}\,{}_2\varphi_1\left(a,\frac{p}{a};-p;p,\frac{ip}{x}\right).$$

5. Commentaires

Il est bien connu que la transformation de Laplace joue un rôle important dans l'analyse de la singularité d'une équation différentielle analytique ainsi que dans la théorie des fonctions spéciales. Nous avons examiné [14,15] durant ces dernières années, des possibilités de faire adapter cette transformation à l'étude locale d'une singularité d'une équation aux q-différences; la version adoptée dans le présent article est introduite dans la Note [15]. Nous allons terminer l'article par quelques commentaires sur les résultats obtenus ci-dessus.

(5.1) La formule (4.7), valable pour tout paramètre ν n'appartenant pas à l'ensemble des entiers strictement négatifs, est une version q-analogue du développement asymptotique suivant (cf. [13, 7.21 (1)]):

$$J_\nu(x)\sim\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}(U_\nu\cos(x-\nu\pi/2-\pi/4)+V_\nu\sin(x-\nu\pi/2-\pi/4))$$

où U, V sont deux séries entières, divergentes, en $1/x$. Les "grands zéros" ξ de $J_\nu(x)$ sont approximativement donnés par la simple relation trigonométrique

$$\cot(\xi-\nu\pi/2-\pi/4)=0.$$

De façon similaire, les "grands zéros" ξ de $J_\nu^{(2)}(x;q)$, fournis par la fonction $\varphi_\nu(p^{\nu+1}x)$, sont voisins des grandes racines de l'équation "elliptique"

$$\theta_p(-\alpha p^{-\nu-1}\xi)+\theta_p(\alpha p^{-\nu-1}\xi)=0;$$

ceci fournit une explication à des résultats de M.E.H. Ismail [7, Theorems 4.2–4.3].

(5.2) Dans la famille des fonctions q-Bessel $J_\nu^{(k)}(x;q)$ ($k=1$, 2), il y a notamment les versions q-analogues de $\sin x$ et $\cos x$, introduites par F.H. Jackson (cf. [6, p. 23]); ces dernières correspondent aux cas où $\nu=-1/2$, $1/2$. Par exemple, on a:

$$\cos_p(x)={}_2\varphi_1(0,0;q^{1/2};q,-x^2),$$

et le corollaire 1.6 impliquera:

$$\cos_p(x)=-\frac{(q,p;q)_\infty}{2}\left(\frac{f_\alpha(t/2)}{\theta_p(\alpha tp^{-1/2}/2)}+\frac{f_\alpha(-t/2)}{\theta_p(-\alpha tp^{-1/2}/2)}\right).$$

Nous avons supposé $\nu\notin\mathbf{Z}$. Comme on vient de faire remarquer dans (5.1), cette hypothèse restrictive peut être remplacée dans une bonne partie de § 3, par $\nu\notin-\mathbf{N}^*$. En ce qui concerne le Théorème 1.4, si ν était un entier non strictement négatif, on aurait à la place de ${}_2\varphi_1(0,0;q^{-\nu+1};q,-x^2/4)$ une partie q-logarithmique; ceci résulte du fait que l'on aurait à appliquer le Théorème des résidus à une fonction ayant des pôles doubles (voir le dernier paragraphe de [15]). Une autre façon de traiter le cas de

ν entier non négatif consisterait à poser, dans (1.4), $\nu = k + \varepsilon$ ($k \in \mathbf{N}$) puis à passer à la limite avec $\varepsilon \to 0$.

(5.3) La formule de connexion (0.2), rappelée au début de l'article et due à G.N. Watson, concerne la famille des séries hypergéométriques basiques ${}_2\varphi_1(a, b; c; q, x)$, mais elle ne reste valable que si $ab \neq 0$. Nos formules (1.4) et (4.7) peuvent être considérées, via la Proposition 3.1, comme cas particuliers de (0.2). Que se passe-t-il pour ${}_2\varphi_1(a, b; c; q, x)$ si $a = 0$ et $bc \neq 0$? En résolvant à l'infini l'équation aux q-différences du second ordre correspondante, on sera conduit à étudier des séries entières divergentes (c-à-d: le rayon de convergence vaut zéro); voir le travail [16], où nous avons présenté une synthèse sur diverses méthodes de sommation possibles pour ce type de série divergente.

La connaissance de la matrice de connexion à la Birkhoff permet de classifier les équations aux q-différences linéaires fuchsiennes sur $\mathbf{P}(\mathbf{C})$; en plus, elle sert à décrire leur groupe de Galois associé. Pour ces matières, voir [3,5,10,12]. On connaî t peu d'énoncés dans le cas non fuchsien ; voir [16, Théorème 1.5.3].

Nota. Une partie de ce travail a été présentée à la conférence "Special Functions 2000: Current Perspective and Future Directions" (29/05–09/06, 2000, Tempe, Arizona State University, USA). Je tiens à remercier les organisateurs de la conférence et particulièrement à Professeur Mourad E.H. Ismail pour le témoignage de son intérêt.

References

[1] C.R. Adams, Linear q-difference equations, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931) 361–382.
[2] R. Askey, The q-gamma and q-beta functions, Appl. Anal. 8 (1978) 125–141.
[3] G.D. Birkhoff, The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations, Proc. Amer. Acad. 49 (1913) 521–568.
[4] Y. Chen, M.E.H. Ismail, K.A. Muttalib, Asymptotics of basic Bessel functions and q-Laguerre polynomials, J. Comput. Appl. Math. 54 (1994) 263–272.
[5] P.I. Etingof, Galois groups and connection matrices of q-difference equations, Electron. Res. Announce. Amer. Math. Soc. 1 (1995) 1–9.
[6] G. Gasper, M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
[7] M.E.H. Ismail, The zeros of basic Bessel functions, the functions $J_{(nu+ax)}(x)$, and associated orthogonal polynomials, J. Math. Anal. Appl. 86 (1982) 1–19.
[8] S. Lang, Real and Functional Analysis, 3rd Edition, Springer, New York, 1993.
[9] J.E. Littlewood, On the asymptotic approximation to integral functions of zero order, Proc. London Math. Soc. Ser. 2 (5) (1907) 361–410.
[10] M. van der Put, M. Singer, Galois Theory of Difference Equations, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1666, Springer, Berlin, 1997.
[11] J.P. Ramis, J. Martinet, Théorie de Galois différentielle et resommation, in: E. Tournier (Ed.), Computer Algebra and Differential Equations, Academic Press, New York, 1988, pp. 117–214.
[12] J. Sauloy, Théorie de Galois des équations aux q-différences fuchsiennes, Thèse de Toulouse, 1999.
[13] G.N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge Mathematical Library Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
[14] C. Zhang, Développements asymptotiques q-Gevrey et séries Gq-sommables, Ann. Inst. Fourier 49 (1999) 227–261.
[15] C. Zhang, Transformations de q-Borel–Laplace au moyen de la fonction thêta de Jacobi, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, t. 331 (2000) 31–34.
[16] C. Zhang, Une sommation discrèt pour des équations aux q-différences linéaires et à coefficients analytiques: théorie générale et exemples, in: J.L.J. Braaksma, G.K. Immink, M. van der Put, J. Top (Eds.), Differential Equations and Stokes Phenomenon, World Scientific, 2002.